Keine Ahnung von Abstandsberechnung

Wie berechnet man ***vektoriell***

Abstände?

Ohne CAS

Einmalige Zusammenstellung der Berechnungsmethoden (fast) aller denkbaren Konstellationen

Stand: 16. Oktober 2020

Datei Nr. 64200

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort: Bitte Lesen!

Dieser Text zeigt die Lösungen von **10 Grundaufgaben auf 16 Lernblättern**.
Einige dieser Aufgaben werden im Text 64201 mit CAS gelöst.

Hinweis:

GA heißt Grundaufgabe

LB heißt Lernblatt

Oftmals sind mehrere Lösungsmethoden angegeben.
Es reicht natürlich, wenn man eine kennt.

Es gibt weitere, hier nicht erwähnte Lösungsmethoden.

Im Anhang findet man eine Liste mit Angaben, in welchem Text der Mathematik-CD die jeweilige Methode ausführlich besprochen wird.

„Mathematik können" heißt Methoden wissen!

Hier stehen 10 Grundaufgaben

Zu jeder Grundaufgabe ist ein Zahlenbeispiel angegeben, das du lösen sollst.
Anschließend findest du die Lösungen mit oft verschiedenen Methoden.

GA 1 Abstand zweier Punkte

Zahlenbeispiel: $A(-2\,|\,1\,|\,5),\; B(2\,|\,5\,|\,-2)$

LB1a Betrag des Verbindungsvektors berechnen

GA 2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Zahlenbeispiel: $P_1(3\,|\,5\,|\,2)$ und $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

LB2a Methode mit der Lotebene

LB2b Operative Methode.

LB2c Lotvektor von P_1 auf g mit doppeltem Kreuzprodukt.

GA 3 Abstand paralleler Geraden

Zahlenbeispiel: g $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} [illegible] \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ und h; $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

LB3a Methode mit der Lotebene

LB3b Operative Methode.

GA 4 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Zusatzaufgabe: Spiegle ein Punkt an der Ebene.

LB4a Lot von P_1 auf die Ebene ergibt den Lotfußpunkt.

Zahlenbeispiel: E: $x + 2y - 2z = 3$ und $P_1(3\,|\,7\,|\,-11)$

LB4b Abstand eines Punktes von einer Ebene mit HNF (1. Fall)

Zahlenbeispiel: E: $2x - 3y + 5z = 15$ und $P_1(2\,|\,2\,|\,4)$

LB4c Abstand eines Punktes von einer Ebene mit HNF (2. Fall)

Zahlenbeispiel: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $P_1(2\,|\,2\,|\,4)$

GA 5 Abstand paralleler Ebene

LB5 Methode mit der Hesseschen Normalform:

Zahlenbeispiele: E_1: $2x+4y-4z=9$, E2: $-x-2y+2z=5$

E_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ E_4: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}$

GA 6 Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene

LB6 Methode mit der Hesseschen Normalform:

Zahlenbeispiel: E: $2x+3y-4z=9$ und g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\8\\ [illegible]\end{pmatrix}_{\vec a}$ [illegible] $\begin{pmatrix}-2\\ [illegible]\\ [illegible]\end{pmatrix}$

GA 7 Sind zwei Geraden windschief?

LB7 Überprüfung, ob sie in einer Ebene liegen

d. h. ob $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ komplanar sind (z. B. Determinantenmethode)

Zahlenbeispiel: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_{\vec a}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\vec u}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}[illegible]\\1\\2\end{pmatrix}_{\vec b}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}_{\vec v}$

GA 8 Kürzester Abstand windschiefer Geraden

Zahlenbeispiel: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\ [illegible]\end{pmatrix}_{\vec a}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\vec u}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}_{\vec b}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}_{\vec v}$

LB8a Methode der parallelen Ebenen, Abstand mit HNF.

LB8b Operative Methode

GA 9 Welche Punkte von g haben von E den Abstand 6?

LB9 Hessesche Normalform verwenden

Zahlenbeispiel: E: $x+2y-2z=3$. und die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

GA 10 Gesucht sind zu E parallele Ebene im Abstand d.

LB10 Hessesche Normalform verwenden

Zahlenbeispiel: E: $3x+2y-6z=28$. und $d=12$

Hilfen für die folgenden Seiten:

(1) Die **Koordinatengleichung** einer Ebene (z. B. $2x + y - 4z = 12$) nennt man auch ihre **Normalengleichung**, weil die Koeffizienten der linken Seite einen Normalenvektor der Ebene bilden: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene.

(2) Eine **Normalengleichung „normieren“** bedeutet, dass man die Gleichung durch den Betrag ihres darin enthaltenen Normalenvektors dividiert.
Damit erhält dieser den Betrag 1 (was man „normieren“ nennt.
In (1) müsste man dazu die Gleichung durch $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$ dividieren.

(3) Die Hessesche Normalform (HNF) einer Ebenengleichung die... ...azu, Abstände ... Punkten zur Ebene zu berechnen. Das kann einem so weiterhelfen:
Ist irgendeine Aufgabe zu lösen, bei der es um Abstände zu ... er Ebene geht, sollte man an die HNF als Hilfsmittel denken!

(4) Abstände können keine negativen Zahlen sein. Dah... da... an nicht ... , bei einer Abstandsberechnung mit der HNF Betragsstriche zu s... zen!